

Příklad. Necht' $\alpha: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ je lineární zobrazení, jehož matice vzhledem ke kanonické („staré“) bázi $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice A je $\chi_A = -x^2(x - 2)$ a můžeme jej zapsat jako součin nesoudělných polynomů $q_1 = -x^2$ a $q_2 = x - 2$. Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 2$.

Tedy

$$q_1(A) = -A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -6 & 6 & -12 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad q_2(A) = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom $U_1 = \text{Ker } q_1(A) = \text{Ker}(-A^2)$ je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $-A^2$ a $U_2 = \text{Ker } q_2(A) = \text{Ker}(A - 2E)$ je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $A - 2E$. Tedy $U_1 = \{(-2, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ a $U_2 = \{(1, 3, 2)\}$.

Takže \mathbf{R}^3 je přímým součtem invariantních podprostorů U_1, U_2 a vektory $f_1 = (-2, 0, 1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 3, 2)$ tvoří „novou“ bázi prostoru \mathbf{R}^3 . Matice přechodu od staré báze k nové bázi je

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

a matice zobrazení α vzhledem k nové bázi je

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$